Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа р.п. Евлашево Кузнецкого района

Научно-практическая конференция школьников «Старт в науку»

Метод неопределённых коэффициентов и его универсальность.

Выполнила: Светлова Ксения Алексеевна,
ученица 11 класса МБОУ СОШ р.п. Евлашево,
Кузнецкого района
Научный руководитель: учитель математики
Кузьмина Любовь Михайловна

Евлашево

2020 г.

Содержание

1. Введение.

Обучаясь в 11 классе, я всё больше предпочтения отдаю точным наукам**. С**тараясь расширить свой кругозор, я участвую в различных олимпиадах, готовлю к урокам выступления на темы, выходящие за школьный курс алгебры 11 класса. Так изучая тему «Интегралы», меня заинтересовал вопрос, как найти первообразную дробно-рациональной функции. Вопрос у меня возник и при выполнении задания из олимпиады «Будущие исследователи-будущее науки». Изучив оба вопроса, пришла к выводу, что они решаются одинаково. Методом неопределённых коэффициентов.

Меня это заинтересовало. Изучив литературу, я выяснила, что, в основном, этот метод используется в высшей математике (дифференциальные и интегральные исчисления). Я же в своей работе решила показать универсальность этого метода, более широкое его применение. Сложность работы заключалась в том, что метод неопределенных коэффициентов используется в различных разделах алгебры, как вспомогательный и практически отсутствует теория. Я постаралась собрать весь разрозненный материал вокруг самого метода.

Цель моей работы: исследовать возможность применения метода неопределенных коэффициентов при решении задач элементарной математики и при решении функциональных уравнений.

Задачи:

1. Изучить литературу по данной теме.

2. Доказать теоремы Виета, Безу, схему Горнера, с помощью метода неопределенных коэффициентов.

3. Рассмотреть возможность использования метода в различных задачах алгебры. Например: решить с помощью метода неопределенных коэффициентов разнообразные уравнения и неравенства.

4. Решить с помощью метода неопределенных коэффициентов ряд функциональных уравнений.

5. На основе полученных результатов сделать выводы о роли метода неопределенных коэффициентов в школьном курсе математики.

6. Познакомить учащихся 10-11 х классов с результатами своей работы.

Гипотеза: В математике существуют такие задачи, для которых метод неопределенных коэффициентов является рациональным.

2. Необходимое и достаточное условие тождественности двух многочленов.

Метод неопределенных коэффициентов обычно применяется в тех случаях, когда в результате некоторых преобразований получается определенного вида выражение и неизвестны лишь коэффициенты. Тогда эти коэффициенты обозначаются буквами и рассматриваются как неизвестные. При этом следует пользоваться теоремой:

Необходимым и достаточным условием тождественности двух многочленов, заданных в каноническом виде, является равенство коэффициентов членов.

Метод неопределенных коэффициентов является одним из наиболее распространенных методов тождественных преобразований. Однако в курсе алгебры средней школы он не освещен, поэтому я решила изучить данный метод подробнее по другим источникам.

Применение метода неопределенных коэффициентов основано на следующих двух теоремах:

Теорема 1 (о многочлене, тождественно равном нулю). Если при произвольных значениях аргумента x значение многочлена $f(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2 +\ldots a_nx^n$, заданного в стандартном виде, равно нулю, то все его коэффициенты a_0, a_1, $a_2,\ldots, a_n$ равны нулю.

Эта теорема утверждает, что никакой многочлен, кроме нулевого многочлена, не может быть тождественно равным нулю.

Теорема 2. Пусть $f(x)= a_0 + a_1x+\ldots a_nx^n$ и $g(x) = b_0+b_1x+\ldots.b_nx^n$

Для того чтобы $f(x)= g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$a_0= b_0,\ a_1 = b_1,\ldots, a_n= b_n$ (следствие теоремы 1)

3. Применение метода неопределённых коэффициентов.

3.1 Разложение многочлена на множители

При решении уравнений, неравенств иногда рациональнее разложить многочлен на множители, чтобы приравняв, множители к нулю найти его корни. Рассмотрим пример на разложения многочлена на множители.

$x^5+x^4+2x^3+2x^2+1$. Как видим, свойство коэффициентов применить нельзя. И среди делителей свободного члена целых корней нет.

Допустим, что разложение на множители возможно. Тогда имеем тождество

$x^5+x^4+2x^3+2x^2+1=(ax^2+\text{в}x+c)\,(mx^3+nx^2+px+q)$

$x^5+x^4+2x^3+2x^2+1 = amx^5 + anx^4 + apx^3 + aqx^2 + bmx^4 + bnx^3 + bpx^2 + bqx + cmx^3 + cnx^2 + cpx + cq = amx^5 + x^4(an + bm) + x^3(ap + +bn + cm) + x(bq + cp) + cq$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} am=1 \\ an+bm=1 \\ ap+bn+cm=2 \\ aq+bp+cn=2 \\ bq+cp=2 \\ cq=1 \end{cases}$$

Решим эту систему в целых числах. Из первого уравнения системы видно, что a=m=1 или a=m=-1.

Тогда

$$\begin{cases} n+b=1 \\ p+bn+cm=2 \\ q+bp+cn=2 \\ bq+cp=2 \\ cq=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -n-b=-1 \\ -p+bn-c=2 \\ -q+bp+cn=2 \\ bq+cp=2 \\ cq=1 \end{cases}$$

Достаточно рассмотреть только один случай. Решим первую систему.

Имеем $n=1-b$. Подставив в остальные уравнения системы вместо n полученное для него выражение через b, получимс=q=1

$$\begin{cases} p+b(1-b)+c=2 \\ q+bp+c(1-b)=2 \\ p+b=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + b - b^2 + c = 2 \\ q + bp + c - bc = 2 \\ p + b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b^2 + b + p = 1 \\ b(p-1) = 0 \\ p + b = 2 \end{cases}$$

Откуда $b=1$, $n=0$.

Итак, $b=1$, $n=0$, $a=c=1$ $m=p=q=1$. Получаем:

$x^5+x^4+2x^3+2x^2+1=(x^2+x+1)(x^3+x+1)$

Таким образом, мы разложили многочлен пятой степени на множители второй и третьей степени.

3.2 Решение уравнений высших степеней.

Зная, как разложить многочлен высших степеней на множители мы можем применить этот способ для решения уравнений.

x^4 −12x+323= 0. Уравнение приведённое, неполное, четвёртой степени. Попробуем разложить его левую часть на два многочлена второй степени.

Решение.

x^4 −12x+323= $(x^2 + px + q)(x^2 + mx + n) = x^4 + mx^3 + x^2n + x^3p + mpx^2 + npx + qx^2 + qmx + qn = x^4 + x^3(m + p) + x^2(n + mp + q) + x(np + qm) + qn$

$$\begin{cases} m + p = 0 \\ n + mp + q = 0 \\ np + qm = -12 \\ qn = 323 \end{cases}$$

$m = -p$; 323=17·19 ;q=17; n=19;

$$m = -p;$$

$19 - p^2 + 17 = 0, 19p - 17p = -12,$

p= - 6; m=6; q=17; n=19;

Итак, x^4 −12x+323 =$(x^2 - 6x + 17)(x^2 + 6x + 19)$

$(x^2 - 6x + 17)(x^2 + 6x + 19)$= 0

Уравнение не имеет действительных корней, так как дискриминант отрицательный. Значит, разложить на множители первой степени невозможно.

3.3 Упрощение выражений

Покажем применение МНК для упрощения выражения. Данный пример олимпиадного характера.

1. $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$

Решение.

С помощью метода неопределенных коэффициентов докажем следующее равенство

$\frac{1}{(x+к)(x+к+1)}=\frac{1}{x+к}-\frac{1}{x+к+1}$.

Доказательство:

$\frac{1}{(x+к)(x+к+1)}=\frac{A}{x+к}+\frac{B}{x+к+1}$; Ax+Aк+A+Bx +Bк= x(A+B) + Aк + A+ Bк; Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$\begin{cases} A+B=0 \\ Aк+A+Bк=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-B \\ -Bк+Bк-B=1 \end{cases}$

B= -1; A=1

$\frac{1}{(x+к)(x+к+1)}=\frac{1}{x+к}-\frac{1}{x+к+1}$. Что и требовалось доказать. А теперь доказанное равенство используем для упрощения выражения:

Получим:

$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}=A$

$A=(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})+(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})+(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3})+(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4})+(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5})=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{x+5-x}{x(x+5)}=\frac{5}{x(x+5)}$.

Рассмотрим пример, где необходимо найти сумму дробей, каждая из которых составлена своеобразным способом.

2. Найти сумму

$A=\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

Решение.

Методом неопределенных коэффициентов, докажем следующее равенство

$\frac{1}{k(n+k)}=\frac{1}{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k})$.

Доказательство:

$\frac{1}{k(n+k)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{n+k} = \frac{An+Ak+Bk}{k(n+k)} = \frac{k(A+B)+An}{k(n+k)}$

$\begin{cases} A+B = 0 \\ An = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -B \\ A = \frac{1}{n} \quad B = -\frac{1}{n} \end{cases}$

$\frac{1}{k(n+k)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k}\right)$. Что и требовалось доказать.

Используя это равенство, найдём сумму $A = \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

Имеем: $\frac{1}{2\cdot5} = \frac{1}{2(3+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$; $\frac{1}{5\cdot8} = \frac{1}{5(3+5)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)$; $\frac{1}{8\cdot11} = \frac{1}{8(3+8)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right)$ и т. д.

$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{(3n-1)(3+(3n-1))} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)$.

$A = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3n+2-2}{2(3n+2)}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3n}{2(3n+2)}\right) = \frac{n}{2(3n+2)}$.

3. Найдём разность $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$

Решение. Оценим подкоренные выражения. Так как, $40\sqrt{2} - 57 < 0$, то $|40\sqrt{2} - 57| = 57 - 40\sqrt{2}$.

Тогда $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$.

Положим $57 - 40\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^2$, где a и b – неизвестные коэффициенты.

$57 - 40\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{2}ab$, откуда

Тогда $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 57 \\ 2ab = -40 \end{cases}$

Решая данную систему уравнений, получим a = 5, b = -4. Ответ: $-8\sqrt{2}$.

Чтобы извлечь квадратный корень, нужно представить подкоренное выражения в виде квадрата суммы. Используя формулу квадрата суммы и МНК, я сумела вычислить данную разность.

3.4 Освобождение от иррациональности

При изучении преобразований иррационального выражения очень важным является вопрос о том, как освободиться от иррациональности в знаменателе дроби. Из школьного курса мы знаем два способа, умножение и числителя и знаменателя на радикал и умножение на сопряженное выражение. Я применила метод неопределённых коэффициентов.

Избавимся от иррациональности в знаменателе: $\frac{3}{3-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}$

Решение: $\frac{3}{3-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$,

отсюда $\left(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\right)\left(3 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right) = 3.$

Раскроем скобки, сгруппируем:

$$3a - a\sqrt[3]{2} - a\sqrt[3]{4} + 3b\sqrt[3]{2} - b\sqrt[3]{8} + 3c\sqrt[3]{4} - c\sqrt[3]{8} - b\sqrt[3]{4} - c\sqrt[3]{16} = 3$$
$$3a - a\sqrt[3]{2} - a\sqrt[3]{4} + 3b\sqrt[3]{2} - 2b + 3c\sqrt[3]{4} - 2c - b\sqrt[3]{4} - c\sqrt[3]{16} = 3$$
$$(3a - 2b - 2c) + \left(3b\sqrt[3]{2} - a\sqrt[3]{2}\right) + \left(3c\sqrt[3]{4} - a\sqrt[3]{4} - b\sqrt[3]{4}\right) - c\sqrt[3]{16} = 3$$
$$(3a - 2b - 2c) + \left(3b\sqrt[3]{2} - a\sqrt[3]{2} - 2c\sqrt[3]{2}\right) + \left(3c\sqrt[3]{4} - a\sqrt[3]{4} - b\sqrt[3]{4}\right) = 3$$
$$(3a - 2b - 2c) + \sqrt[3]{2}(3b - a - 2c) + \sqrt[3]{4}(3c - a - b) = 3$$

$$\begin{cases} -a + 3b - 2c = 0, \\ 3a - 2b - 2c = 3, \\ -a - b + 3c = 0, \end{cases} \begin{cases} -a + 3b - 2c = 0, \\ 7b - 8c = 3, \\ -4b + 5c = 0, \end{cases} \begin{cases} -a + 3b - 2c = 0, \\ 3b - 3c = 3, \\ -4b + 5c = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} -a + 3b - 2c = 0, \\ b - c = 1, \\ 4b - 5c = 0, \end{cases} \begin{cases} -a + 3b - 2c = 0, \\ b - c = 1, \\ -c = -4, \end{cases}$$

c = 4;
b - 4 = 1;
-a + 15 - 8 = 0;
b = 5;
a = 7

Ответ: $\frac{3}{3-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}} = 7 + 5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4}$

Данную дробь можно было умножить на сопряжённое выражение и применить формулу разности квадратов, но цель моей работы показать универсальность МНК.

3.5 Решение неравенств.

Если левая часть неравенства представима в виде многочлена, можно применить МНК.

Решить неравенство $x^4 - x^3 + x - 1 \leq 0$.
Легко видеть, что числа 1 и – 1 являются корнями многочлена $x^4 - x^3 + x - 1$,тогда его можно разложить на множители

$x^4 - x^3 + x - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + px + q)$,

$x^4 - x^3 + x - 1 = x^4 + px^3 + x^2 q - x^2 - px - q$

$x^4 : 1 = 1$

$x^3 : \ p = -1$

$x^2 : \ q - 1 = 0$

$x : \ -p = 1$

$-q = -1 \ p = -1, q = 1$

Получим $(x^2 - 1)(x^2 - x + 1) \leq 0$

$x^2 - x + 1 > 0$ при любых значениях x, так как D = - 3 .

Следовательно, $x^2 - 1 \leq 0$,

т.е $-1 \leq x \leq 1$. $[-1; 1]$.

Данное неравенство можно решить вынесением общего множителя за скобки, в данном случае МНК более громоздкий, что даёт основание думать о его несовершенстве.

3.7Интегрирование по частям.

В школьном курсе математики отсутствует материал о том, как интегрировать дробно рациональное выражение. Изучив, необходимый материал я применила МНК.

$$\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}=\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}=(*)$$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}=\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)=x^2-19x+6$$

$$\begin{cases}A+B+C=1\\5A+2B+C=-19\\6A-3B-2C=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=1-A-B\\4A+B=-20\\8A-B=8\end{cases}\Rightarrow 12A=-12;A=-1;B=-16;C=18$$

$$(*)=\int\left(-\frac{1}{x-1}-\frac{16}{x+2}+\frac{18}{x+3}\right)dx=-\int\frac{dx}{x-1}-16\int\frac{dx}{x+2}+18\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+18\ln|x+3|+C,\ \text{где}\ C=const$$

Метод неопределённых коэффициентов выручил и в этот раз.

4.Заключение

Занимаясь исследовательской работой, я перелистала много книг, просмотрела много сайтов Интернет. Данный метод широко применяется при решении нестандартных задач, при выведении формул и нахождении интеграла.
Рассмотренные в работе примеры могут быть решены и другими способами. Но цель работы заключалась в том, чтобы решить их методом неопределённых коэффициентов, показать универсальность этого метода, его оригинальность и рациональность, не отрицая того, что в некоторых случаях он приводит к громоздким, но не сложным преобразованиям.
Использование метода неопределённых коэффициентов не исчерпывается лишь примерами, приведёнными в работе. Думаю продолжить работу по решению задач на применение данного метода, так как не все задачи оказались мне по силам на данный момент. Думаю, что работа по изучению этого метода пригодится мне в дальнейшем.

Литература

И. Кушнир « Шедевры школьной математики», Астарта, Киев,1995

С.Р.Сефибеков «Внеклассная работа по математике»,Москва «Просвещение» 1988

В.В. Ткачук   «Математика абитуриенту»,

А. В. Калебин, Р.Ф. Ксенофонтов «Математика. Пособие для поступающих в ВлГУ»

С. И. Туманов «Поиски решения задач», Москва «Просвещение», 1969